Simboli di Landau

- o piccolo
- O grande
- $\sim$ eq. asintotica

$\boxed{\text{o piccolo}}$ $D \subset \mathbb{R}$, $f, g : D \to \mathbb{R}$, x_0 punto dove i limiti hanno senso.

Diciamo che "f è $o(g)$ per $x \to x_0$" se

$\exists\, \omega : D \to \mathbb{R}$ t.c.

$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ f(x) = g(x) \cdot \omega(x) \qquad \forall x \in D \\ 2)\ \lim_{x \to x_0} \omega(x) = 0 \end{array}}$$

cioè $f(x) = g(x) \cdot ?$ $\to$ che tende a 0 per $x \to x_0$.

<u>Def eq.</u>: Se $g(x) \neq 0$ $\forall x \in D \setminus \{x_0\}$ allora

f è $o(g)$ per $x \to x_0$ se $\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.}$

Da ora in poi $x_0 = 0$.

Esempi ① $x^2 = o(x)$ per $x \to 0$.

$$x^2 = x \cdot \underbrace{x}_{\omega(x)} \qquad \lim_{x \to 0} \omega(x) = 0.$$

② $x^a = o(x^b)$ per $x \to 0 \iff a > b$

$$x^a = x^b \cdot \underbrace{x^{a-b}}_{\omega(x)}. \qquad a-b > 0 \qquad \lim_{x \to 0} x^{a-b} = 0$$

Oss. Vale anche se $a, b < 0$

$$\frac{1}{x^a} \overset{?}{=} o\left(\frac{1}{x^b}\right)$$

(Qui nessuna delle 2 $\to 0$ per $x \to 0$).

$$\frac{1}{x^a} = \frac{1}{x^b} \cdot \underbrace{x^{b-a}}_{\omega(x)}$$

③ $\operatorname{sen} x \neq o(x)$ per $x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$$

3bis $\operatorname{sen}(x) = o(\sqrt{x})$ per $x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\to 1} \cdot \sqrt{x}$$

$= 0.$

$\boxed{\text{Sviluppini}}$

$x \to 0$

$\operatorname{sen} x = x + o(x)$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$\log(1+x) = x + o(x)$

$e^x = 1 + x + o(x)$

$\arctan x = x + o(x).$

⋮

D

Formule di Taylor con resto di Peano

Teorema $f(x)$ definita in $(-\delta, \delta)$ con $\delta > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Suppongo

1) f derivabile $(n-1)$-volte in $(-\delta, \delta)$

2) $f^{n}(x)$ esiste in 0.

$\Rightarrow \exists!$ polinomio di grado n $P_n(x)$ t.c.

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n)$$

e dato da

$$P_n(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k .$$

Sviluppi di Taylor delle funz. elem.

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + o(x^{2n+1})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + o(x^{2n})$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + o(x^n)$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + o(x^{2n+1})$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + o(x^n).$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)}{2}x^2 + \dots$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n)$$

O grande

Def. $f(x) = O(g(x))$ per $x \to x_0$

se 1) $f(x) = g(x) \cdot \omega(x)$

2) $\omega(x)$ è limitata in un intorno di x_0.

Corollario $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$

$$\Rightarrow f(x) = O(g(x)) \text{ per } x \to x_0$$

Dim. $f(x) = g(x) \cdot \omega(x)$

$\lim_{x \to x_0} \omega(x) = 0 \Rightarrow \omega(x)$ limitata in un intorno di x_0.

Oss $\not\Leftarrow$ Es. $\operatorname{sen} x = O(x)$ per $x \to 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ ma $\operatorname{sen} x \neq o(x)$.

per $x \to x_0$

Proprietà $O(f) \cdot o(g) = o(f \cdot g)$.

Dim. $h_1 \in O(f)$ $\quad h_1(x) = f(x) \cdot \omega_1(x)$

$h_2 \in o(g)$ $\quad h_2(x) = g(x) \cdot \omega_2(x)$

$$h_1 \cdot h_2 = (f \cdot g)(x) \cdot \omega_1(x) \cdot \omega_2(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} (\omega_1 \cdot \omega_2)(x) = \lim_{x \to x_0} \underbrace{\omega_1(x)}_{\text{può non avere limite!}} \cdot \omega_2(x)$$

Ma è limitata $\Rightarrow \exists\, C > 0$ t.c.

$$-C < \lim_{x \to x_0} \omega_1(x) < C$$

$$\Rightarrow -C \cdot \underbrace{\lim_{x \to x_0} \omega_2(x)}_{0} \leq \underbrace{\lim_{x \to x_0} \omega_1(x) \cdot \omega_2(x)}_{0} \leq C \cdot \underbrace{\lim_{x \to x_0} \omega_2(x)}_{0}$$

Carabinieri

$$\Rightarrow o(f) \cdot o(g) = o(f \cdot g).$$

Analogo: $O(f) \cdot O(g) = O(f \cdot g)$.

Serie numeriche

Criterio del confronto asintotico

a_n e b_n successioni positive.

Supponiamo che

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \in (0, +\infty)$$

$\Rightarrow$ a_n e b_n hanno lo stesso comportamento.

IN PIÙ

1) Se $\ell = 0$ allora

b_n converge $\Rightarrow$ a_n converge

2) se $\ell = +\infty$

b_n diverge $\Rightarrow$ a_n diverge.

Ex Provate a "convincersi" dei casi limite (1)-2)) riguardando la dimostrazione.

Esercizi

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^{\sqrt{n}}} = a_n$

$a_n \geq 0$

$\sum a_n$

1) $\sqrt[n]{a_n} \to \ell \in (0,1)$
$\Rightarrow \sum$ converge

2) $\sqrt[n]{a_n} \to L \in (1,+\infty]$
$\Rightarrow \sum$ diverge

($\sqrt[n]{a_n} \to 1$???)

Osso $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Provo criterio radice

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^{\sqrt{n}}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{2/n}}{2^{\sqrt{n}\cdot\frac{1}{n}\sqrt{n}}} \to 1.$$

Non posso dire niente.

Provo C.A. con $\sum_{n=1}^{+\infty} \underset{b_n}{\underset{\parallel}{\frac{1}{n^2}}} \to$ questa converge.

Calcolo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2^{\sqrt{n}}} \cdot n^2 =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^4}{2^{\sqrt{n}}} \underset{\sqrt{n}=x}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^8}{2^x} = 0.$$

$$\text{Altern.} = \lim_{n\to+\infty} e^{-\sqrt{n}\log 2 + 4\log n} \to 0.$$

$-\sqrt{n}\log 2 + 4\log n \to -\infty$

Chiudo per caso limite del C.A.

2) Al variare di $\alpha > 0$ discutere la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(\alpha^n)}{n^\alpha} = a_n$$

Condiz. necessaria: $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

$$\underset{\substack{\| \\ 0}}{0} \le \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\lim_{n\to+\infty} a_n} \le \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{n^\alpha}}$$

carabinieri

Cond. nec. soddisfatta $\forall\alpha$.

<u>Oss.</u> Le successioni: $x_{n\alpha} = \alpha^n$ hanno

3 comp. diversi al variare di $\alpha \geq 0$.

1) Se $\alpha > 1$, $\alpha^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

2) Se $\alpha \in (0,1)$ $\alpha^n \longrightarrow 0$

3) se $\alpha = 1$ $\alpha^n \equiv 1$.

Inoltre oss. che per $x \to 0$ $\arctan(x) = x + o(x)$

Distinguiamo quindi 3 casi

$\boxed{\text{Caso 1}}$ $\alpha = 1$

$$\sum a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi/4}{n} \rightsquigarrow \text{diverge.}$$

$\boxed{\text{Caso 2}}$ $\alpha > 1$

$$\Big(\underbrace{\frac{\pi}{4} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leq}_{\text{inutile}}\Big) \sum a_n \leq \frac{\pi}{2} \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}}_{\text{converge per } \alpha > 1}$$

$\Rightarrow \sum a_n$ converge per confronto.

$\boxed{\text{Caso 3}}$ $\alpha \in (0,1)$

$$\sum a_n = \sum \frac{\arctan(\alpha^n)}{n^\alpha}$$

Idea: $\arctan(\alpha^n) \sim \alpha^n$

$\Rightarrow \sum a_n \sim \sum \frac{\alpha^n}{n^\alpha}$

radice n-esima $\to$ $\alpha \in (0,1)$

$\Rightarrow$ converge.

Formalmente: faccio $\sqrt[n]{a_n}$.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{\arctan(\alpha^n)}{n^\alpha}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{\alpha^n + o(\alpha^n)}{n^\alpha}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{\alpha^n + o(\alpha^n)}}{\underbrace{\sqrt[n]{n^\alpha}}_{\to 1}} = \alpha \in (0,1) \Rightarrow \text{converge}$$

$$\sqrt[n]{\alpha^n + o(\alpha^n)} = \sqrt[n]{\alpha^n\left(1 + \frac{o(\alpha^n)}{\alpha^n}\right)} =$$

$$= \alpha \cdot \sqrt[n]{1 + \underbrace{\frac{o(\alpha^n)}{\alpha^n}}_{\to 0}} = \alpha$$

Riepilogo: $\alpha = 1$ diverge

$(\alpha \geq 0,)\ \alpha \neq 1$ converge.

3) Al variare di $x \in \mathbb{R}$ e $\alpha > 0$ discutere l'andamento della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\underbrace{\operatorname{sen}(x)^n}_{b_n(x)} \cdot \underbrace{\log\left(1+\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)}_{c_n} \cdot \underbrace{(e^x + \arctan x)}_{f(x)}}_{a_n(x)}$$

<u>Oss. 0</u> Per la condiz. necessaria devo calcolare, al variare di x (che di volta in volta è fisso) il

$$\lim_{n \to +\infty} a_n(x).$$

1) $b_n(x) = \operatorname{sen}(x)^n$: se $x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

$\Rightarrow b_n(x) \equiv 0$, quindi anche $a_n(x) \equiv 0$.

Dunque per $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $\sum$ converge (a 0) $\forall \alpha$.

Inoltre, è sufficiente studiare $b_n(x)$

in $(-\pi, \pi)$

Per $x \in (0, \pi)$ $\quad \operatorname{sen}(x) \in (0,1)$.

$\Rightarrow \operatorname{sen}(x)^n \longrightarrow 0$. A meno che $x = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{sen}(x)^n \equiv 1$

Per $x \in (-\pi, 0)$ $\quad \operatorname{sen}(x)^n = (-1)^n \cdot |\operatorname{sen}(x)|^n$.
$\longrightarrow 0$ (tranne $x = -\frac{\pi}{2}$)

Dunque qui la serie è a segno alterno.

2) $c_n = \log\left(1 + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Quindi la cond. nec. è soddisfatta $\forall \alpha > 0$ e $\forall x \in \mathbb{R}$.

3) $f(x) = e^x + \arctan(x)$ non influisce

sull'andamento della serie, a meno che...

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

Quindi per il teo. di esistenza

degli zeri, $\exists\, \tilde{x}$ t.c. $f(\tilde{x})=0$.

Dico che ne esiste uno solo.

Infatti: $f(x)$ è somma di funzioni strett. crescenti $\Rightarrow$ è strett. crescente.

Ora voglio dire che $\tilde{x} \neq k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Infatti $f(0)=1$, ed

$$f(-1) = e^{-1} + \arctan(-1) =$$

$$= \frac{1}{e} - \frac{\pi}{4} < 0.$$

$$\Rightarrow \tilde{x} \in (-1,0) \Rightarrow \tilde{x} \neq k\pi.$$

Quindi anche per $x=\tilde{x}$ $\sum < +\infty \ \forall \alpha$.

Quattro casi: $x=\frac{\pi}{2}$, $x\in(0,\pi)\setminus\{\frac{\pi}{2}\}$

$x=-\frac{\pi}{2}$, $x\in(-\pi,0)\setminus\{-\frac{\pi}{2}\}$

Osservo che $\sum a_{n,x}$ ha lo stesso comportamento, per $x \neq \bar{x}, k\pi$, di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n(x) \cdot c_n .$$

$\boxed{\text{CASO } x = \frac{\pi}{2}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1 + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)$

Idea: $a_n \sim \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \sim \frac{1}{n^\alpha}$

$\Rightarrow \sum a_n \sim \sum \frac{1}{n^\alpha}$

Formalmente: facciamo C.A. con

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \quad \text{lim notevole}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(1+\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)}{\operatorname{sen}\left(1/n^\alpha\right)} \stackrel{*}{=} 1$$

$\Rightarrow$ ha lo stesso comp. di $\sum \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$

C.A. con $\sum \frac{1}{n^\alpha}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)}{1/n^\alpha} = 1$$

$\Rightarrow$ La serie si comporta come $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ $\Rightarrow$ Converge se $\alpha > 1$

diverge se $\alpha \in (0,1)$.

$\boxed{\text{Caso } x = -\frac{\pi}{2}}$ $\sum (-1)^n \cdot \log\left(1 + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)$

Intanto, per assoluta convergenza + caso precedente, per $\alpha > 1$ converge.

Applico $\underbrace{\text{criterio di Leibnitz}}$

$\sum (-1)^n a_n$: 1) $a_n \geq 0$, $a_n \to 0$

2) $a_{n+1} \leq a_n$ def.

$\Rightarrow \sum$ converge.

$a_n = \log\left(1 + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)$

log crescente, sen crescente

$\frac{1}{n^\alpha} \to 0$ decrescente

$\Rightarrow a_n$ decrescente

$$a_{n+1} = \log\left(1+\operatorname{sen}\left(\frac{1}{(n+1)^\alpha}\right)\right)$$

$$\underset{?}{\leq} \log\left(1+\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)$$

$$\Longleftrightarrow \cancel{1+} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{(n+1)^\alpha}\right) \leq \cancel{1}+\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha} \qquad \text{VERO.}$$

$\Rightarrow$ $x = -\frac{\pi}{2}$, $\sum a_n$ converge $\forall \alpha > 0$.

Altri due casi: esercizio.
Spedire a

bargagnati@mail.dm.unipi.it